

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika õppekava

Salme Ojasild

Klastrite moodustumine konkureerivate Browni uitlejate ühedimensionaalses mudelis

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Els Heinsalu
Juhendaja: David Navidad Maeso
Juhendaja: Peeter Oja

Tartu 2019

Klastrite moodustumine konkureerivate Browni uitlejate ühedimensionaalses mudelis

Bakalaureusetöö

Salme Ojasild

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös tutvutakse mudeliga, mis kirjeldab Browni uitlejate arvu muutust ajas ja nende paiknemist ruumis. Vaadeldavas mudelis sõltuvad uitlejate suremis- ja paljunemistõenäosused teiste uitlejate arvust uitleja ümbruses raadiusega R ehk konkurentsist ressursidele. Töös uuritakse esiteks üldiselt, millal saavutab antud mudelit kirjeldav võrrand ruumimuutuja suhtes mittekonstantseid perioodilisi lahendeid ehk toimub uitlejate koondumine klastritesse. Seejärel analüüsitakse numbrilistest simulatsioonidest saadud andmeid. Töö põhineb peamiselt E. Hernández-García ja C. López'i artiklil *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates* (Physical review E, 70 (2004), 016216).

CERCS teaduseriala: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Märksõnad: olemusvõitlus, matemaatiline bioloogia, interaktsioonid, klastrid.

Clustering in one dimensional competing Brownian walkers model

Bachelor's thesis

Salme Ojasild

Abstract. This bachelor thesis examines a model that describes the change in number of Brownian walkers over time and their location in space. In the model in question, the probabilities of particle death and multiplication depend on the number of other particles around the particle within a radius of R or competition for resources. The work first examines, in general, when the equation describing this model achieves non-constant spatially periodic solutions, ie concentration of particles into clusters. Data from numerical simulations is then analyzed. The work is mainly based on the article by E. Hernández-García and C. López on *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates* (Physical review E, 70 (2004), 016216).

CERCS research specialisation: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Keywords: competition, mathematical biology, interactions, clusters.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Populatsioonimudelitest üldiselt	5
1.1 Mõisted	5
1.2 Eksponentsiaalse kasvu mudel	5
1.3 Logistiline kasvumudel	6
2 Browni uitlejad: lõpliku ulatusega mittelokaalne interaktsioon	8
2.1 Mudeli kirjeldus	8
2.2 Konstantne lahend	10
2.3 Lahendi ϕ_s stabiilsusanalüüs	10
2.3.1 Funktsiooni $\omega = \omega(K)$ leidmine	10
2.3.2 Täpsustavad tingimused funktsioonile $\omega = \omega(K)$	12
2.3.3 Lahendite stabiilsuset	16
3 Numbrilistest simulatsioonidest saadud andmete analüüs	17
3.1 Uitlejate ajalis-ruumilised mustrid	17
3.2 Klastrite vaheline kaugus	19
4 Kokkuvõte	23
Viited	24

Sissejuhatus

Populatsioonidünaamikat on uuritud ja modelleerida püütud väga kaua. Teada on 1202. aastast pärinev Pisa Leonardo raamat, mis sisaldas harjutust jäneste populatsiooni mudeldamiseks [1]. Populatsioonidünaamika võrrandid võimaldavad uurida mitmeid inimeste jaoks huvitavaid nähtusi ning kasuliku rakendusena prognoosida huvipakkuva populatsiooni arvukust tulevikus. Muuhulgas on neid võrrandeid võimalik kasutada selleks, et uurida (ja prognoosida) muutusi inimkonna arvukuses, bakterite ja viiruste arvu suurenemist, ning ohustatud liikide väljasuremist [1].

Käesolev bakalaureusetöö põhineb peamiselt Emilio Hernández-García ja Cristóbal López 2004. aastal ilmunud artiklil *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates*. Töö käigus tutvume selles artiklis kirjeldatud mudeliga ühedimensionaalsel juhul, kus isendite paljunemis- ja suremistõenäosused sõltuvad lõpliku raadiusega naabruses paiknevate teiste isendite arvust. Lisaks suremisele ja paljunemisele sooritavad isendid ka uitliikumist. Antud mudel kirjeldab interakteeruvate uitlejate süsteemi ning on rakendatav lisaks populatsioonibioloogiale ka füüsikas, keemias ja sotsioloogias [3].

Varasemalt on teada, et mingitel tingimustel toimub isendite koondumine perioodiliselt paiknevatesse klastritesse [2]. Töö eesmärgiks on uurida, millal see täpsemalt juhtub, ning klasterdumise korral uurida tekkinud klastreid.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis tuuakse välja töös kasutatavad ökoloogia alased mõisted ning tutvustatakse lühidalt eksponentsiaalset ja logistilist populatsioonidünaamika võrrandit. Teises peatükis tutvutakse konkureerivate Browni uitlejate ühedimensionaalse mudeliga ning seda kirjeldava võrrandiga, millele leitakse konstantne lahend ning seejärel uuritakse võnkumisi konstantse lahendi ümber. Kolmandas peatükis uuritakse klastreid ja nende teket simulatsiooniandmete põhjal. Neljandas ehk viimases peatükis võetakse lühidalt kokku töö käigus saadud tulemused.

1 Populatsioonimudelitest üldiselt

1.1 Mõisted

Järgnevalt defineerime mõned töös kasutatavad loodusteaduslikud mõisted.

Populatsiooniks nimetatakse kõiki samast liigist isendeid, kes elavad samal alal, mida nimetatakse *areaaliks* ehk domeeniks.

Suletud populatsiooniks nimetatakse sellist populatsiooni, mille areaali ei ole võimalik väljast poolt siseneda ega sellest väljuda [4]. See tähendab, et migratsioon üle populatsiooni areaali piiri ei ole võimalik. Kui migratsioon on võimalik, siis on tegemist *avatud populatsiooniga* [4].

Populatsioonitiheduseks nimetatakse populatsiooni kuuluvate isendite arvu pindala- või ruumalaühiku kohta [4].

Keskkonna kandevõimeks K nimetatakse maksimaalset isendite arvu, mida see keskkond on suuteline ülalpidama [4]. Tavaliselt määrab selle saadaoleva ressursi maht [1].

Mittelokaalseks interaktsiooniks nimetatakse olukorda, kus organismide paljunemise ja suremise tõenäosused sõltuvad naabruskonnas raadisuega $R > 0$ paiknevate teiste organismide arvust [5]. Kui *interaktsioonide raadius* R on domeenimõõtimest L oluliselt väiksem ($R \ll L$), siis on tegemist *lõpliku ulatusega interaktsiooniga* [5].

1.2 Eksponentsiaalse kasvu mudel

1798. aastal uuris Malthus sündimust ja suremust oma kihelkonnas ning jõudis võrrandini, mida tuntakse kui eksponentsiaalse kasvu võrrandit [4]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Delta_0 N, \quad (1)$$

milles $\Delta_0 = \beta - \delta$, kus β ja δ tähistavad vastavalt sündimust ja suremust elaniku kohta. Malthus käsitles suremust ja sündimust indiviidi kohta konstantsena ning

populatsiooni suurusest sõltumatuna [4]. Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga.

Tähistades isendite arvu populatsioonis ajahetkel $t = 0$ sümboliga N_0 , saame võrrandi (1) lahendiks

$$N(t) = N_0 e^{\Delta_0 t}.$$

Näeme, et selle mudeli kohaselt, kui sündimus ületab suremuse, siis isendite arv kasvab tõkestamatult ning vastupidisel juhul sureb populatsioon ajapikku välja. Kui sündimus ja suremus on võrdsed, siis isendite arv ajas ei muutu. Eksponentsiaalne mudel sobib kirjeldama populatsioonikasvu ainult algusfaasis, kuna ei võta arvesse ressurside (toit, elupaik) piiratust [6]. Joonisel 1 on sinise värviga kujutatud eksponentsiaalse kasvu mudelit.

1.3 Logistiline kasvumudel

Logistilises kasvumudelis sõltub populatsiooni juurdekasvu kiirus isendite arvust ja keskkonna kandevõimest: mida lähemal on isendite arv keskkonna kandevõimele, seda aeglasem on juurdekasv [1]. Logistilist kasvumudelit kirjeldab järgmine eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dN}{dt} = \Delta_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (2)$$

milles $N(t)$ on isendite arv ajahetkel t , $\frac{dN}{dt}$ isendite arvu muutumise kiirus, K keskkonna kandevõime ja Δ_0 positiivne konstant [1]. Antud mudelis on $\Delta_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ sündimus isendi kohta [1].

Tähistame isendite arvu populatsioonis ajahetkel $t = 0$ sümboliga N_0 .

Kui $N = K$, siis on võrrandi (2) lahend konstantne ja $N(t) = N_0 (= K)$ iga t väärtuse korral.

Kui $N \neq K$, siis saame võrrandi (2) lahendiks

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{\Delta_0 t}}{[K + N_0(e^{\Delta_0 t} - 1)]}.$$

Leiame järgnevalt võrrandi (2) lahendist piirväärtuse protsessis $t \rightarrow \infty$.

Juhul $N = K$ on ilmne, et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K.$$

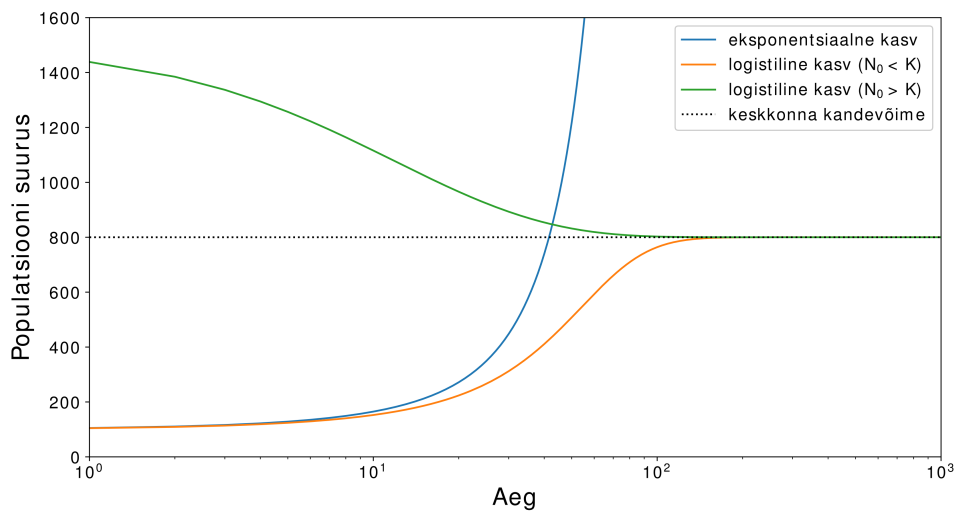
Kui $N \neq K$, siis

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 K e^{\Delta_0 t}}{e^{\Delta_0 t} \left(\frac{K}{e^{\Delta_0 t}} + N_0 - \frac{N_0}{e^{\Delta_0 t}} \right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 K}{\left(\frac{K}{e^{\Delta_0 t}} + N_0 - \frac{N_0}{e^{\Delta_0 t}} \right)} = K.$$

See tähendab, et kui $t \rightarrow \infty$, siis läheneb populatsiooni suurus keskkonna kandevõimele.

Jooniselt 1 näeme, et kui $N_0 < K$, siis populatsioon kasvab monotoonselt, ning kui $N_0 > K$, siis populatsioon kahaneb monotoonselt. Mõlemal juhul jääb populatsiooni suurus keskkonna kandevõime juures pidama ja enam ei muutu.

Nii eksponentsiaalne mudel kui ka logistiline mudel sobivad sellisel kujul kirjeldama vaid suletud süsteeme kuna ei käsitle sisse- ja väljarände mõju.



Joonis 1: Eksponentsiaalse ja logistilise kasvu mudelid

2 Browni uitlejad: lõpliku ulatusega mittelokaalne interaktsioon

2.1 Mudeli kirjeldus

Eelmises peatükis kirjeldatud mudelid on võimalikult lihtsad ning seetõttu leidub neil mitmeid olulisi puudusi. Muuhulgas ei ole arvestatud asjaoluga, et tegelikuses toimub isendite liikumine populatsioonide vahel, ning tõenäoliselt sõltub isendite vaheline konkurents arvukusele lisaks ka nende paiknemisest ruumis. Järgnevalt vaatame mittelokaalsete interaktsioonidega ühedimensionaalset ruumilist logistilist mudelit, mis võtab arvesse nii migratsiooni (difusiooni konstandi abil) kui ka mittelokaalseid interaktsioone.

Järgnev mudeli kirjeldus toetub artiklile [3]. Alghetkel $t = 0$ paigutatakse N_0 uitlejat juhuslikult perioodiliste rajatingimustega domeeni laiussega L . Ajahetkel t , kui populatsiooni suurus on $N(t)$, valitakse juhuslikult uitleja j , kes sureb tõenäosusega

$$\beta(j) = \max\left(0, \beta_0 - \frac{\alpha}{N_s} N_R^j\right), \quad (3)$$

saab järglase tõenäosusega

$$\lambda(j) = \max\left(0, \lambda_0 - \frac{1}{N_s} N_R^j\right) \quad (4)$$

ning jääb samasse olekusse (ei sure ega paljune) tõenäosusega $1 - \beta(j) - \lambda(j)$ (need kolm tegevust on üksteist välistavad). Juhul kui uitleja saab järglase, siis on järglase asukoht sama nagu vanemal. Võrdustes (3) ja (4) tähistab N_R^j uitlejale j lähemal kui R paiknevate uitlejate arvu (uitlejat j arvestamata), β_0 on konstant, mis iseloomustab suremust uitleja kohta ajaühikus, λ_0 on konstant, mis iseloomustab sündimust uitleja kohta ajaühikus, N_s on küllastumusparameeter ning α mõjutab küllastumusparameetri asümmeetrilist mõju suremusele ja sündimusele. Seda protsessi teostatakse $N(t)$ korda. Seejärel liigub iga uitleja Browni liikumist modelleerides normaaljaotusest pärit juhusliku pikkuse võrra juhuslikus suunas (vasakule või paremale). Pärast seda suurendatakse aega dt võrra.

Seda mudelit kirjeldab järgmine võrrand [3]:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \Delta_0 \phi(x, t) - \gamma \phi(x, t) \int_{x-R}^{x+R} \phi(y, t) dy. \quad (5)$$

Võrrandis (5) tähistab $\phi(x, t) > 0$ uitlejate tihedust kohal x ajahetkel t , $\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t}$ on suuruse $\phi(x, t)$ muutumise kiirus, $\Delta_0 = \lambda_0 - \beta_0 > 0$ on konstant, mis iseloomustab populatsiooni kasvukiirust, $\gamma > 0$ on uitlejate konkureerimise intensiivsus, $D \geq 0$ on Browni difusioonikonstant ja $R > 0$ on interaktsioonide ulatus.

Tähistades

$$N_R^* := \frac{\Delta_0}{\gamma}$$

ja

$$I(\phi) := \int_{x-R}^{x+R} \phi(y, t) dy,$$

saame võrrandiga (5) samaväärse võrrandi (6)

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \Delta_0 \phi(x, t) \left(1 - \frac{I(\phi)}{N_R^*} \right). \quad (6)$$

Võrrandis (6) on N_R^* võrdne segmendi $[x - R, x + R]$ kandevõimega. Näeme, et võrrandi (6) struktuuriga ilma difusiooni sisaldava liikmeta on sarnane võrrandi (2) struktuurile. Seega võib öelda, et võrrand (6) ja seega ka võrrand (5) iseloomustab adekvaatsemat mudelit kui võrrand (2). Paneme tähele ka seda, et kuigi mõlema võrrandi struktuur on ilma difusiooni sisaldava liikmeta ($D = 0$) sarnane, siis ühel juhul on otsitavaks tunnuseks populatsiooni tihedus $\phi(x, t)$ ja teisel juhul populatsiooni arvukus $N(t)$.

Füüsikast on teada, et üldjuhul kehtib valem

$$\text{tihedus} = \frac{\text{mass}}{\text{ruumala}}.$$

Kuna meie vaadeldavas mudelis on domeenil ainult laius (L), siis avaldub maksimaalne tihedus alal laiusega $2R$ valemiga

$$\phi^* = \frac{N_R^*}{2R} = \frac{\Delta_0}{2\gamma R}. \quad (7)$$

See on keskkonna kandevõime analoog tiheduse jaoks. Võrrandist (7) saame, et keskkonna kandevõime N^* avaldub järgmiselt

$$N^* = L\phi^* = L \cdot \frac{\Delta_0}{2\gamma R}. \quad (8)$$

Järgnevalt uurime milliste parameetrite R , D , γ ja Δ_0 väärtuste korral saavutab võrrand (5) mittekonstantseid ruumiliselt perioodilisi lahendeid (ehk teisisõnu toimub võrdsete vahemike tagant klastritesse koondumine).

2.2 Konstantne lahend

Leiame võrrandile (5) nullist erineva konstantse lahendi ϕ_s . Kuna sellisel juhul on funktsiooni ϕ osatuletised mõlema muutuja järgi võrdsed nulliga, siis eespool sisse toodud tähist $I(\phi)$ kasutades saame järgmise võrrandi

$$\Delta_0 \phi_s - \gamma \phi_s I(\phi_s) = 0.$$

Viies liikme $\Delta_0 \phi_s$ teisele poole võrdusmärgi ning jagades võrrandi mõlemad pooli nullist erineva konstandiga $-\gamma \phi_s$, saame

$$I(\phi_s) = \frac{\Delta_0}{\gamma}. \quad (9)$$

Leides integraali

$$I(\phi_s) = \int_{x-R}^{x+R} \phi_s dy = \phi_s \int_{x-R}^{x+R} dy = 2R\phi_s,$$

ja asendades saadud integraali võrrandisse (9), saame

$$2R\phi_s = \frac{\Delta_0}{\gamma} \Rightarrow \phi_s = \frac{\Delta_0}{2\gamma R}.$$

Paneme tähele, et ϕ_s võrdub võrrandis (7) leitud maksimaalse tihedusega segmendis raadiusega R .

2.3 Lahendi ϕ_s stabiilsusanalüüs

Eelmises punktis leidsime võrrandile (5) konstantse lahendi $\phi_s = \frac{\Delta_0}{2\gamma R}$. Järgnevalt uurime lahendi ϕ_s stabiilsust, vaadeldes selleks väikese amplituudiga harmoonilist võnkumist konstantse lahendi ϕ_s ümber. See on adekvaatne, tuginedes Fourier' meetodile osatuletistega võrrandi lahendite leidmiseks.

2.3.1 Funktsiooni $\omega = \omega(K)$ leidmine

Olgu (5) lahendiks

$$\phi(x, t) = \phi_s + \epsilon \phi_H, \quad (10)$$

kus $\phi_H(x, t) = e^{\omega t + iKx}$ ja $\epsilon \ll 1$. Leiame $\omega = \omega(K)$.

Kuna

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} &= \epsilon \omega e^{\omega t + iKx} \\ \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} &= iK \epsilon e^{\omega t + iKx} \\ \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} &= -K^2 \epsilon e^{\omega t + iKx}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\int_{x-R}^{x+R} \phi(y, t) dy &= \int_{x-R}^{x+R} \frac{\Delta_0}{2\gamma R} + \epsilon e^{\omega t + iKy} dy = \\ &= \int_{x-R}^{x+R} \frac{\Delta_0}{2\gamma R} dy + \epsilon e^{\omega t} \int_{x-R}^{x+R} e^{iKy} dy = \\ &= \frac{2\Delta_0 R}{2\gamma R} + \epsilon e^{\omega t} \frac{1}{iK} e^{iKy} \Big|_{x-R}^{x+R} = \\ &= \frac{\Delta_0}{\gamma} + \frac{1}{iK} \epsilon e^{\omega t} (e^{iK(x+R)} - e^{iK(x-R)}) = \\ &= \frac{\Delta_0}{\gamma} + \frac{1}{iK} \epsilon e^{\omega t + iKx} (e^{iKR} - e^{-iKR}) = \\ &= \frac{\Delta_0}{\gamma} + \frac{2}{K} \epsilon e^{\omega t + iKx} \sin(KR),\end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned}(5) \Leftrightarrow \epsilon \omega e^{\omega t + iKx} &= -DK^2 \epsilon e^{\omega t + iKx} + \frac{\Delta_0^2}{2\gamma R} + \Delta_0 \epsilon e^{\omega t + iKx} - \\ &- \left(\frac{\Delta_0}{2R} + \gamma \epsilon e^{\omega t + iKx} \right) \left(\frac{\Delta_0}{\gamma} + \frac{2}{K} \epsilon e^{\omega t + iKx} \sin(KR) \right) = \\ &= -DK^2 \epsilon e^{\omega t + iKx} + \frac{\Delta_0^2}{2\gamma R} + \Delta_0 \epsilon e^{\omega t + iKx} - \\ &- \frac{\Delta_0^2}{2\gamma R} - \frac{\Delta_0}{KR} \epsilon e^{\omega t + iKx} \sin(KR) - \Delta_0 \epsilon e^{\omega t + iKx} - \frac{2\gamma}{K} \epsilon^2 e^{2\omega t + 2iKx} \sin(KR) = \\ &= -DK^2 \epsilon e^{\omega t + iKx} - \frac{\Delta_0}{KR} \epsilon e^{\omega t + iKx} \sin(KR) - \frac{2\gamma}{K} \epsilon^2 e^{2\omega t + 2iKx} \sin(KR).\end{aligned}$$

Arvestades epsiloni väiksust, jätame viimases võrduses ära liikme, mis sisaldab tegurit ϵ^2 , ning saame

$$\begin{aligned}\epsilon \omega e^{\omega t + iKx} &= -DK^2 \epsilon e^{\omega t + iKx} - \frac{\Delta_0}{KR} \epsilon e^{\omega t + iKx} \sin(KR) \Big| : \epsilon e^{\omega t + iKx} \neq 0 \\ \omega &= -DK^2 - \frac{\Delta_0}{KR} \sin(KR) = -\frac{D}{R^2} (KR)^2 - \frac{\Delta_0}{KR} \sin(KR).\end{aligned}\quad (11)$$

Sellisel viisil saadud lahendit võib kasutada lühikese ajaperioodi vältel, sest siis ei ole interaktsioone iseloomustava, tegurit ϵ^2 sisaldava, liikme mõju kuigi suur. Paneme tähele, et $\omega = \omega(K)$ sõltub lisaks parameetrile K ka arvudest D , R ja Δ_0 , kuid ei sõltu arvust γ .

2.3.2 Täpsustavad tingimused funktsioonile $\omega = \omega(K)$

Eeldame, et

$$\left. \frac{\partial \omega(K)}{\partial K} \right|_{K=K_m} = 0 \quad (12)$$

ja

$$\omega(K_m) = 0. \quad (13)$$

Tingimused (12) ja (13) on tarvilikud, et leida parameetrite D , Δ_0 ja R sellised väärtused, mille korral ω maksimumväärtus punktis K_m on null. Rakendades funktsioonile $\omega = \omega(K)$ tingimusi (12) ja (13), saame et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega(K)}{\partial K} \right|_{K=K_m} &= -2KD + \frac{\Delta_0}{K^2 R} \sin(KR) - \frac{\Delta_0}{K} \cos(KR) \Big|_{K=K_m} = \\ &= -2K_m D + \frac{\Delta_0}{K_m^2 R} \sin(K_m R) - \frac{\Delta_0}{K_m} \cos(K_m R) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ja

$$\omega(K_m) = -\frac{D}{R^2} (K_m R)^2 - \frac{\Delta_0}{K_m R} \sin(K_m R) = 0. \quad (15)$$

Tähistame $x_m := K_m R$ ja avaldame võrranditest (14) ja (15) D , siis

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0}{2K_m^3 R} \sin(x_m) - \frac{\Delta_0}{2K_m^2} \cos(x_m) &= -\frac{\Delta_0 R^2}{x_m^3} \sin(x_m) \Big| \cdot \frac{2x_m^3}{\Delta_0} \\ R^2 \sin(x_m) - x_m R^2 \cos(x_m) &= -2R^2 \sin(x_m) \Big| : R^2 \\ 3 \sin(x_m) - x_m \cos(x_m) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

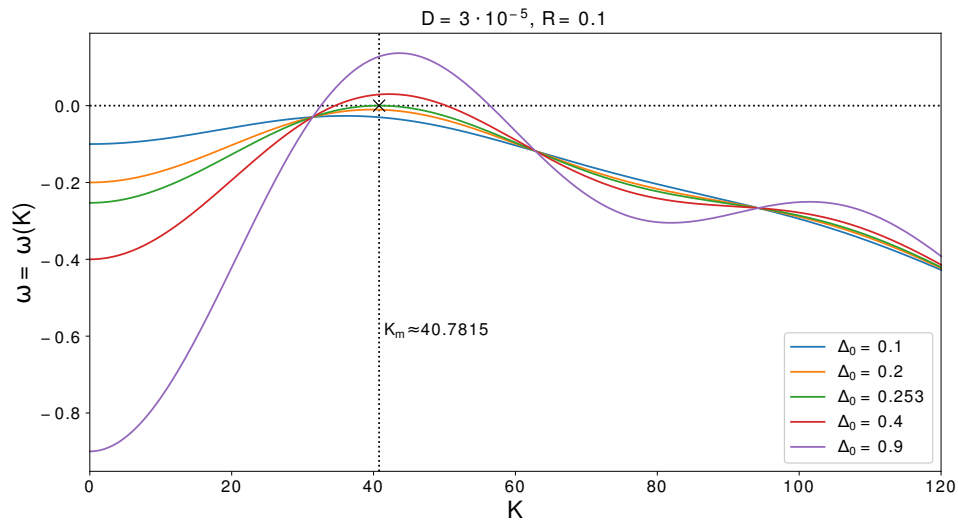
Lahendame saadud võrrandi numbriliselt, kasutades selleks Newtoni meetodit. Olgu $f(x) := 3 \sin(x) - x \cos(x)$ ja x_n lahendi x_m n -is lähend. Newtoni meetodi rakendamiseks piisab, kui f on diferentseeruv. Siis

$$f'(x) = 3 \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = 2 \cos(x) + x \sin(x)$$

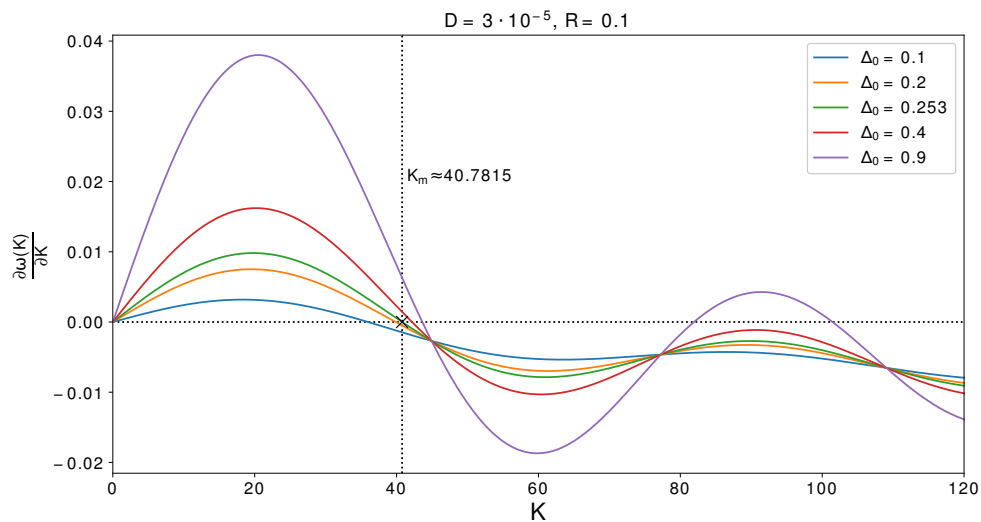
ja Newtoni meetodi iteratsiooni eeskiri on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Iteratsioonimeetodi lõpetamiseks kasutame tingimust $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-8}$.



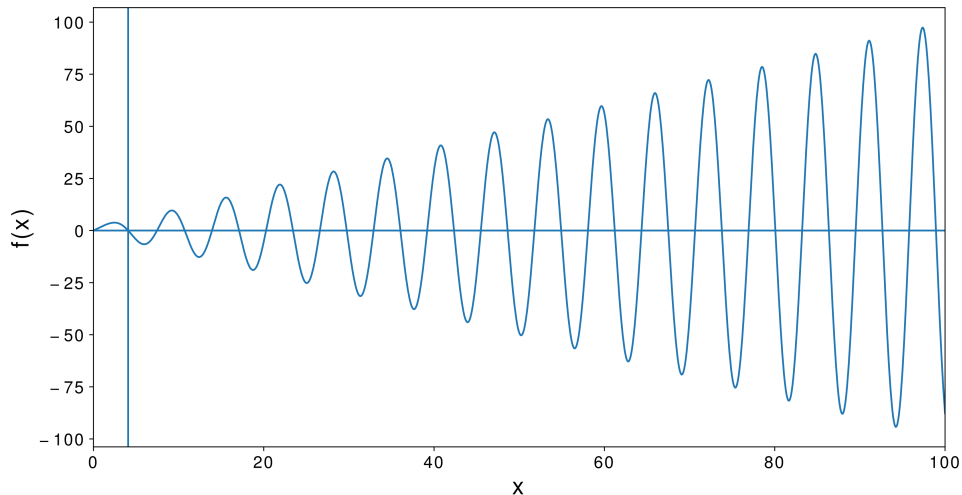
Joonis 2: funktsiooni $\omega = \omega(K)$ graafik



Joonis 3: funktsiooni $\omega = \omega(K)$ osatuletise $\frac{\partial \omega(K)}{\partial K}$ graafik

Alglähendi saamiseks uurime funktsiooni $\omega = \omega(K)$ käitumist parameetri Δ_0 erinevate väärtuste korral, kui $R = 0.1$, $D = 3 \cdot 10^{-5}$. Joonistelt 2 ja 3 on näha, et

K väärtused, mis rahuldavad tingimusi (12) ja (13) kuuluvad vahemikku $(35; 45)$. Seega valime tundmatu $x_m = K_m R$ alglähendiks $x_0 = 4$, mille puhul koondub Newtoni meetod lahendiks $x_m \approx 4.07815$, millest $K_m \approx 40.7815$.



Joonis 4: funktsiooni $f(x)$ graafik

Jooniselt 4 näeme, et tegelikult on võrrandil 16 lõpmatult palju lahendeid. Meie leidsime neist vähima.

Võrrandist (15) saame, et

$$D^* = -\frac{\sin(K_m R)}{K_m^3 R} \Delta_0 \approx 1.18765 \cdot 10^{-4} \Delta_0$$

ja

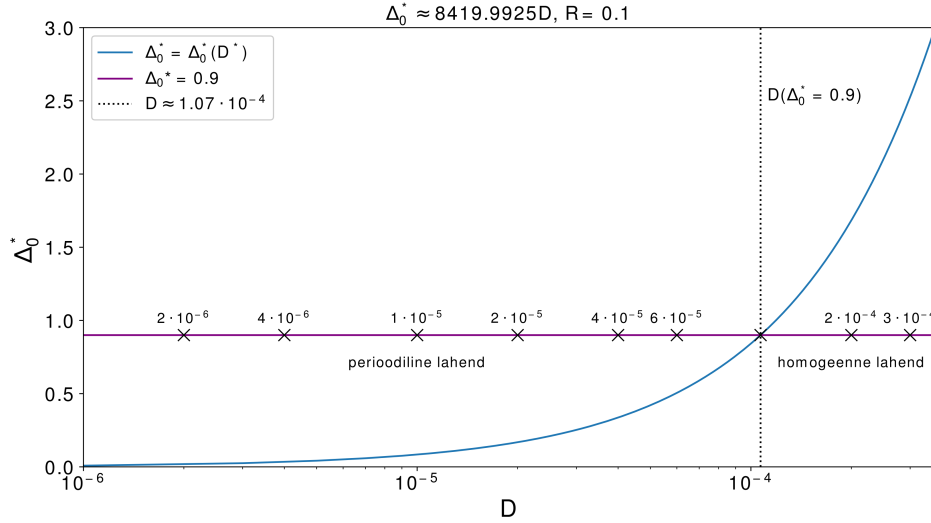
$$\Delta_0^* = -\frac{K_m^3 R}{\sin(K_m R)} D \approx 8419.9925 D.$$

D^* ja Δ_0^* tähistavad vastavalt difusioonikordaja D ja juurdekasvu konstandi Δ_0 kriitilisi väärtuseid. Täpsemalt on D^* selline D maksimaalne väärtus ja Δ_0^* selline Δ_0 minimaalne väärtus, mille korral leiduvad võrrandil (5) muutuja x suhtes perioodilised lahendid (klastrite perioodilisus). Nende väärtuste korral on klastrite vaheline kaugus ruumis δ maksimaalne ja

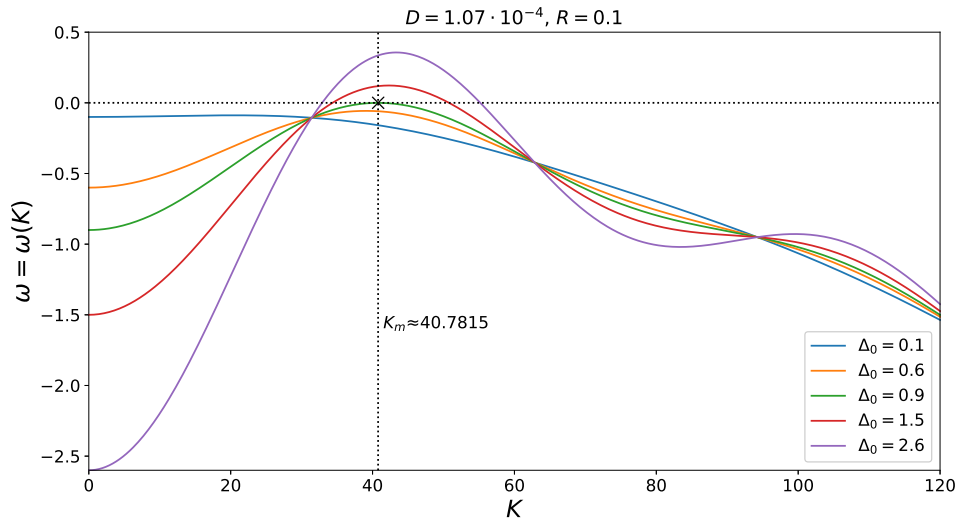
$$\delta = \frac{2\pi}{K_m} = \frac{2\pi R}{x_m}.$$

Tingimustel $R = 0.1$ ja $\Delta_0 = 0.9$, saame et $\delta \approx 0.1541$ ja $D^* \approx 1.0689 \cdot 10^{-4}$.

Kuna tegemist on logistilise mudeliga, siis klastrite tekkimise korral saavutab uitlejate arv segmenti kandevõime ning jääb seal pidama. Seega vahemikus $(X - R, X + R)$, milles X tähistab klatri massikeskme asukohta, on N_R^* uitlejat.



Joonis 5: Ebastabiilsuse joon



Joonis 6: Funktsiooni $\omega = \omega(K)$ graafik tingimustel $D \approx 1.07 \cdot 10^{-4}, R = 0.1$

2.3.3 Lahendite stabiilsuset

Fikseerime difusioonikordaja D väärtuse. Vaatleme erinevaid Δ_0 väärtusi. Juhul, kui $0 < \Delta_0 < \Delta_0^*$, siis on domeenis homogeenne tihedus $\phi = \phi_s$ [3]. Juhul kui $\Delta_0 \geq \Delta_0^*$, siis toimub koondumine klastritesse [3]. Seda iseloomustavad joonised 5 ja 6. Joonis 5 kujutab endast ebastabiilsuse joont juhul $R = 0.1$. Sellel joonisel on x -teljel märgitud konstandi D väärtused ja sinisel joonel asuvad punktid on neile vastavad Δ_0 minimaalsed väärtused, mille korral toimub klastritesse koondumine. Näeme, et juhul $D = 1.07 \cdot 10^{-4}$ on see 0.9. Näeme ka, et mida suurem on difusioonikonstant D , seda suurem peab klastrite tekkeks olema juurdekasvu-konstant Δ_0 .

Joonisel 6 on näha funktsiooni $\omega(K)$ graafik parameetrite $D = 1.07 \cdot 10^{-4}$, $R = 0.1$ ja $\Delta_0 = 0.1, 0.6, 0.9, 1.5, 2.6$ korral. Näeme, et juhul $\Delta_0 = 0.9$ on funktsiooni ω maksimum (punktis $K_m \approx 40.7815$) võrdne nulliga.

3 Numbrilistest simulatsioonidest saadud andmete analüüs

3.1 Uitlejate ajalis-ruumilised mustrid

Andmete saamiseks viidi läbi numbrilised simulatsioonid¹, kasutades selleks punkti 2.1 alguses kirjeldatud metoodikat. Järgnevad joonised iseloomustavad uitlejate paiknemist ruumis ajavahemikus $t \in [10000, 100000]$. Joonised 7 ja 8 on näited difsioonikonstandi D väärtusest, mille korral toimub uitlejate koondumine klastritesse. Kui domeeni laius on lõplik, siis iseloomustab naaberklastrite massikeskmete vahekaugust valem

$$\delta = \frac{L}{N_c}, \quad (17)$$

kus L on domeeni laius ($0 < L < \infty$) ja N_c klastrite arv.

Võrdleme nüüd jooniseid 7 ja 8. Mõlemal juhul on $R = 0.1$ ja $\Delta_0 = 0.9$. Jooniselt 5 on näha, et nende parameetrite korral on maksimaalne konstandi D väärtus, mille korral on võimalik klastritesse koondumine $D^* = 1.07 \cdot 10^{-4}$. Joonis 7 kujutab uitlejate paiknemist ruumis juhul $D = 10^{-7}$ ja joonis 8 juhtu $D = 10^{-5}$. Näeme, et need mõlemad väärtused on kriitilisest väärtusest D^* väiksemad.

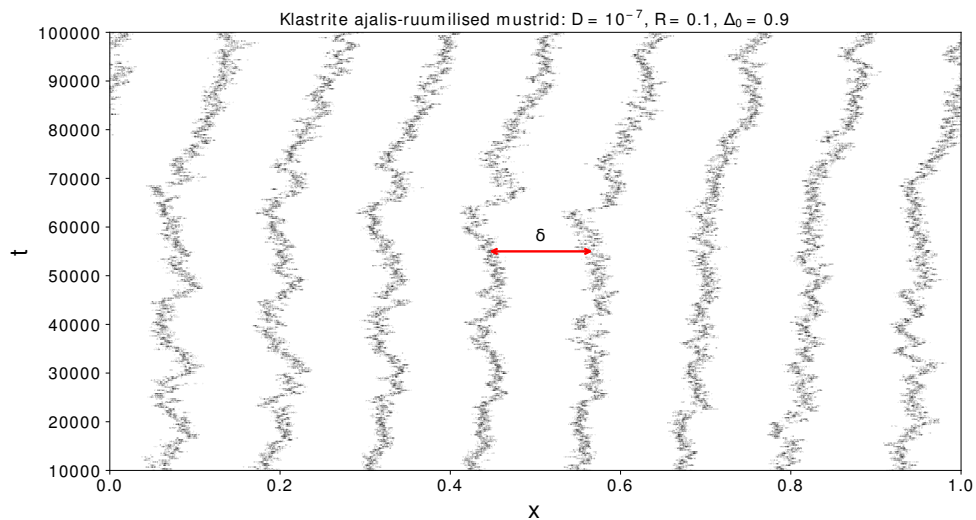
Juhul $D = 10^{-7}$ tekib kaheksa klastrit. Tekkinud klastrid on kitsad, nende massikeskme asukoht ruumis muutub aja jooksul võrdlemisi vähe ning klastrite vahelises ruumis uitlejaid ei leidu.

Juhul $D = 10^{-5}$ tekib seitse klastrit. Tekkinud klastrid on teise juhuga võrreldes laiemad ning nende massikeskme asukoht ruumis muutub võrdlemisi palju. Samuti on klastrite vahelises ruumis näha uitlejaid.

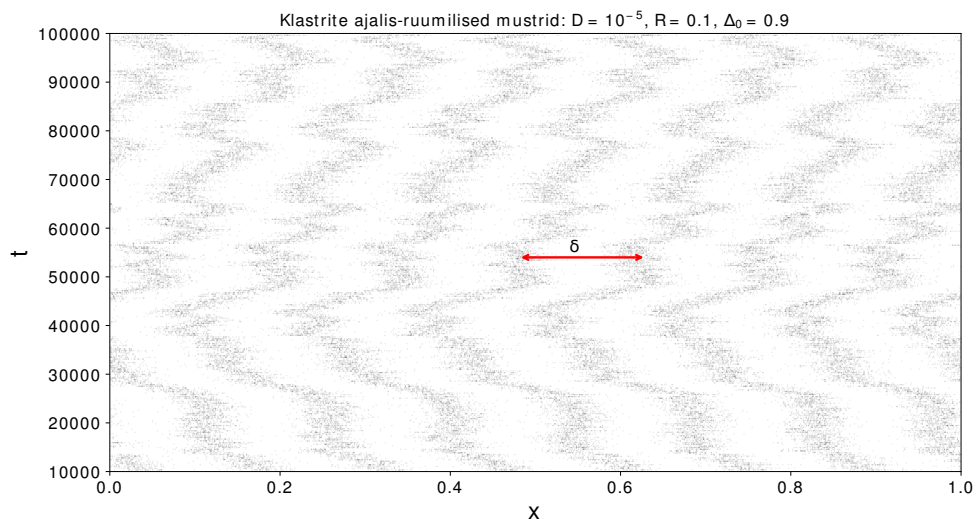
Joonistel 9 ja 10 on konstantide R ning Δ_0 väärtused samad, mis joonistel 7 ja 8 ($R = 0.1$, $\Delta_0 = 0.9$). Nüüd aga on joonisel 9 $D = 10^{-4}$ ja joonisel 10 $D = 10^{-3}$. Näeme, et kummalgi juhul klastreid ei teki ning uitlejad on jaotunud domeenis ühtlaselt.

Paneme tähele, et $D = 10^{-3}$ on kriitilisest väärtusest suurem ning seega on klastrite mitteteke eespool oleva teooriaga kooskõlas.

¹Bakalaureusetöös kasutatud andmed pärinevad David Navidad Maeso simulatsioonidest

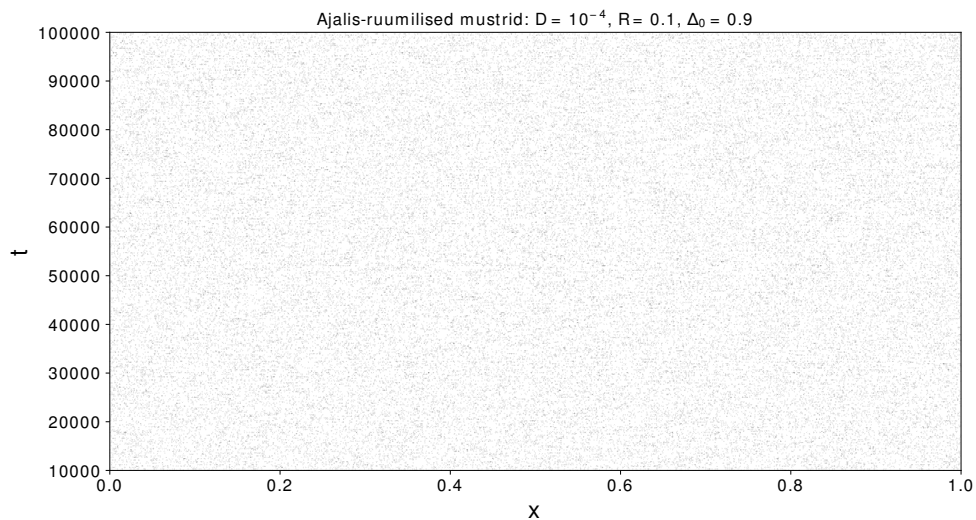


Joonis 7: Klastrite ajalis-ruumilised mustrid tingimusel $D = 10^{-7}$

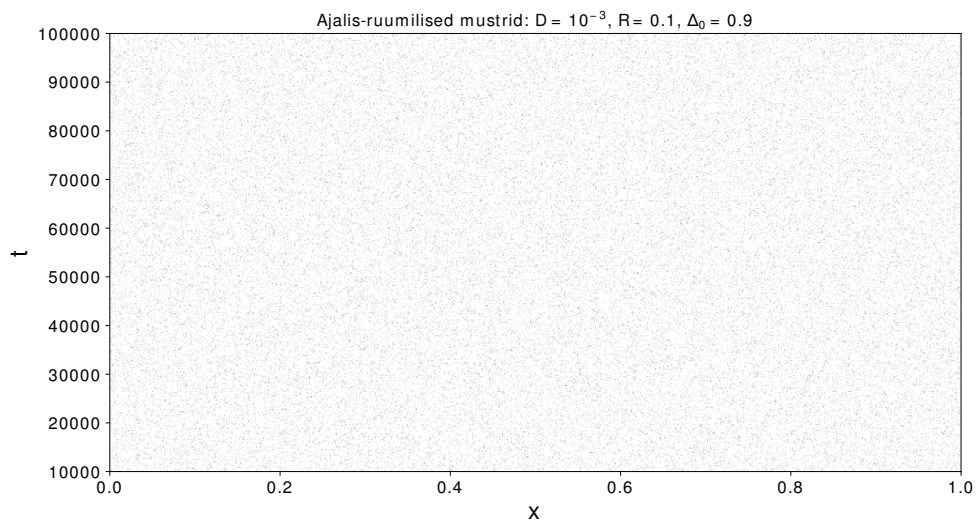


Joonis 8: Klastrite ajalis-ruumilised mustrid tingimusel $D = 10^{-5}$

Üllatuslikult ei teki klastreid ka juhul $D = 10^{-4}$, mis on ligikaudu kriitiline väärtus. Eelnevalt leidsime aga, et kriitilisel juhul peaks tekkima klastritesse koondumine. See erinevus on seletatav asjaoluga, et võrrand (5) kirjeldab deterministlikku süsteemi ehk süsteemi, mille tulevane areng ei sõltu mitte ühestki juhuslikust suurusest. Simulatsioonides kasutatav uitlejate mudel on aga tõenäosuslik. Samuti paigutatakse simulatsioonides uitlejad alguses domeeni juhuslikult.



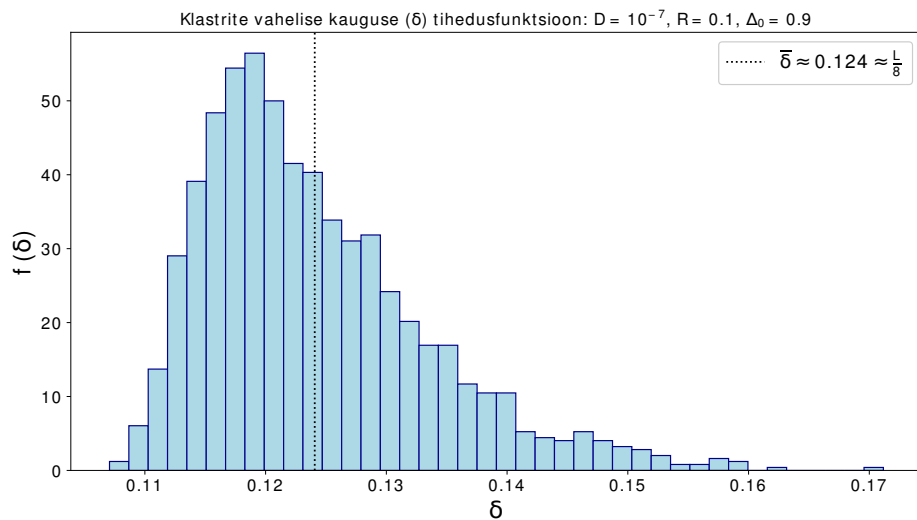
Joonis 9: Uitlejate ajalis-ruumilised mustrid tingimusel $D = 10^{-4}$



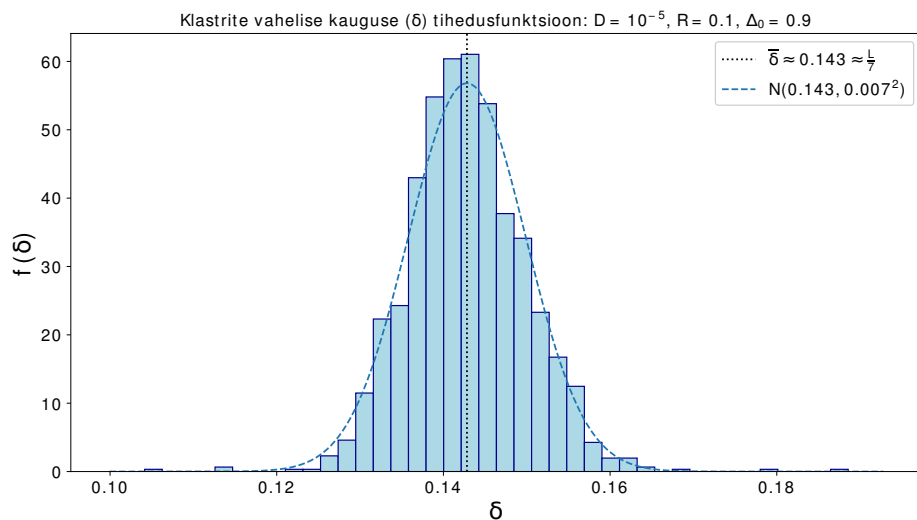
Joonis 10: Uitlejate ajalis-ruumilised mustrid tingimusel $D = 10^{-3}$

3.2 Klastrite vaheline kaugus

Kasutades samu andmeid, mida jooniste 7-10 tegemisel ($R = 0.1$ ja $\Delta_0 = 0.9$), uurime klastrite vahelise kauguse jaotust kahe difusioonikonstandi ($D = 10^{-5}$ ja $D = 10^{-7}$) korral. Joonise 11 tegemiseks on kasutatud andmeid vasakult loendades klastritest 1-7 (vaata joonis 7) ning joonise 12 tegemiseks andmeid klastritest 3-7 (joonis 8).



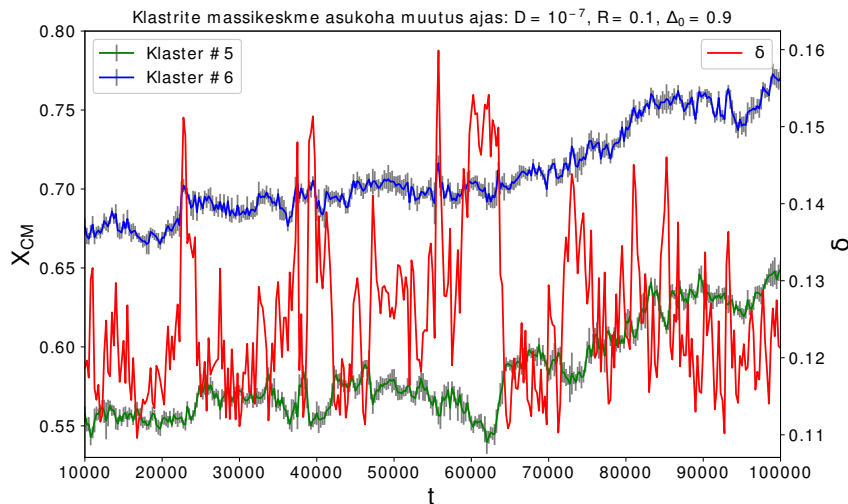
Joonis 11: Klastrite vahelise kauguse tihedusfunktsioon $D = 10^{-7}$



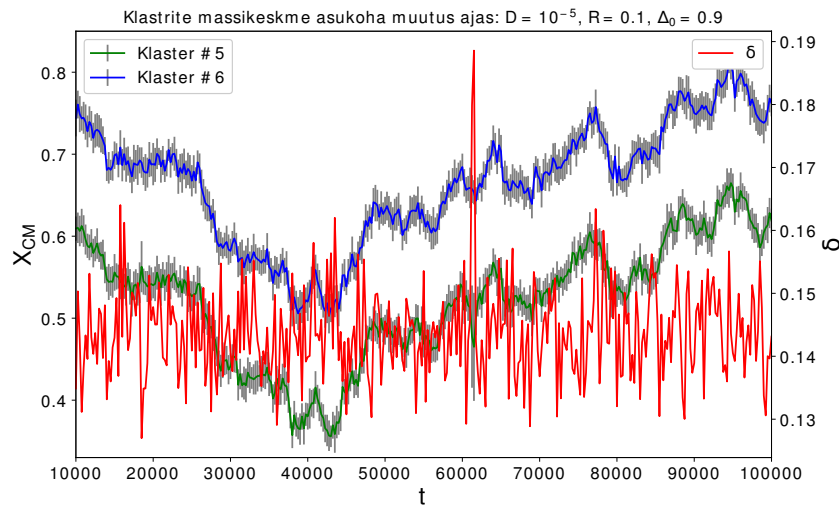
Joonis 12: Klastrite vahelise kauguse tihedusfunktsioon $D = 10^{-5}$

Näeme, et väiksema difusiooni konstandi ($D = 10^{-7}$) korral, on δ jaotus parempoolse sabaga, sarnane Lévy jaotusega ning $\bar{\delta} \approx 0.124$, mis on kooskõlas eespool toodud valemiga $\delta = \frac{L}{N_c}$. Juhul $D = 10^{-5}$ on δ ligikaudu normaaljaotusega ning $\bar{\delta} \approx 0.143$, mis on samuti kooskõlas valemiga (17). Erinevusi tihedusfunktsioonide vahel võib seletada asjaoluga, et suurema D väärtuse korral on Browni difusioon intensiivsem ning seega jõuavad uitlejad oma sünnikohast kaugemale. Seetõttu tekib teisel juhul vähem klastreid.

Joonised 13 ja 14 näitavad viienda ja kuuenda klasteri massikeskme asukoha muutust ajas. Hall ala värvilise joone ümber näitab standardhälvet, mis iseloomustab uitlejate paiknemist vastavates klasterites massikeskme suhtes. Punase joonega on märgitud klasterite vaheline kaugus fikseeritud ajahetkel nende kahe klasteri vahel.



Joonis 13: Klasterite 5 ja 6 massikeskme asukoha muutus ajas juhul $D = 10^{-7}$



Joonis 14: Klasterite 5 ja 6 massikeskme asukoha muutus ajas juhul $D = 10^{-5}$

Näeme, et difusioonikonstandi D väärtuse 10^{-7} korral leidub pikem ajavahe-
mik, mille jooksul on klasterite 5 ja 6 vahekaugus δ oluliselt suurem kui keskmine

klastrite vahekaugus üle kogu vaadeldud ajaperioodi ($\delta - \bar{\delta} > 0.02$, $\bar{\delta} \approx 0.124$). Samuti vastab sellele tingimusele difusioonikonstandi D väärtuse 10^{-7} korral palju rohkem ajahetki kui väärtuse 10^{-5} korral ($\bar{\delta} \approx 0.143$). Samas neid ajahetki, mille korral klastrite 5 ja 6 vahekaugus oleks keskmisest klastrite vahekaugusest üle vaadeldud perioodi oluliselt väiksem ($\bar{\delta} - \delta > 0.02$), ei esine kummagi difusioonikonstandi väärtuse korral. See on ka põhjuseks, miks klastrite vahekauguse tihedusfunktsioon juhul $D = 10^{-7}$ on raske parempoolse sabaga.

4 Kokkuvõte

Käesoleva töö peamiseks eesmärgiks oli uurida, millal leidub mittelokaalse interaktsiooniga ühedimensionaalsel Browni uitlejate mudelil (5) perioodiline lahend ehk tekib organismide koondumine klastritesse.

Selgus, et minimaalne konstandi Δ_0 väärtus Δ_0^* , mille korral leidub võrrandil (5) perioodiline lahend sõltub konstandi D väärtusest järgmiselt: $\Delta_0^* = -\frac{K_m^3 R}{\sin(K_m R)D}$, milles K_m on funktsiooni $\omega(K)$ minimaalne ekstreemumkoht. Fikseerides konstandi D väärtuse on kolm võimalust. Juhul $\Delta_0 < \Delta_0^*$ klastritesse koondumist ei teki ehk perioodilist lahendit ei leidu, juhul $\Delta_0 > \Delta_0^*$ leidub perioodiline lahend ja toimub klastritesse koondumine ning juhul $\Delta_0 = \Delta_0^*$ leidub perioodiline lahend ning klastrite vahekaugus on maksimaalne.

Vaadeldes kahte juhtu, mille korral parameetrite R ja Δ_0 väärtused on samad, aga konstandi D väärtused erinevad, siis väiksema D väärtuse korral on klastrid kitsamad ning nende massikeskmete asukoht muutub ajas vähem, võrreldes suurema D väärtusega klastritega (võrdle jooniseid 11 ja 12). Samuti tekib väiksema D väärtuse korral rohkem klastreid. Mida väiksem on konstandi D väärtus, seda lähemal on klastrite vahekauguse tihedusfunktsioon normaaljaotuse tihedusfunktsioonile.

Viited

- [1] J. D. Murray, *Mathematical Biology I*, Springer, Berlin, 2005.
- [2] C. López, E. Hernández-García, Fluctuations impact on a pattern-forming model of population dynamics with non-local interactions, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 199 (2004), 223-224.
- [3] E. Hernández-García, C. López, Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates, *Physical review E*, 70 (2004), 016216.
- [4] A. M. de Roos, *Modeling Population Dynamics*, 2014
https://staff.fnwi.uva.nl/a.m.deroos/downloads/pdf_readers/syllabus.pdf (viimati vaadatud 09.06.2019).
- [5] E. Heinsalu, Konkureerivad Browni ja Lévy uitlejad, *EFS aastaraamat* (2012), 81-95.
- [6] A. Tsoularis, J. Wallace, Analysis of logistic growth models, *Mathematical Biosciences*, 179 (2002), 21-55.
- [7] C. López, F. Ramos, E. Hernández-García, An absorbing phase transition from a structured active particle phase, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 19 (2007), 065133.
- [8] W. R. Young, A. J. Roberts, G. Stuhne, Reproductive pair correlations and the clustering of organisms, *Nature*, 412 (2001), 328-331.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Salme Ojasild,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

„Klastrite moodustumine konkureerivate Browni uitlejate ühedimensionaalses mudelis“,

mille juhendajad on Els Heinsalu, David Navidad Maeso ja Peeter Oja,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Salme Ojasild

10.06.2019